Funktio

9. luokan matematiikka

Funktio

Suure on mitattava ominaisuus.

- Esim. aika, matka, nopeus, hinta, pinta-ala, tiheys…

Funktio kuvaa kahden suureen välistä riippuvuutta.

Esimerkki 1.

Aika on matkan funktio.

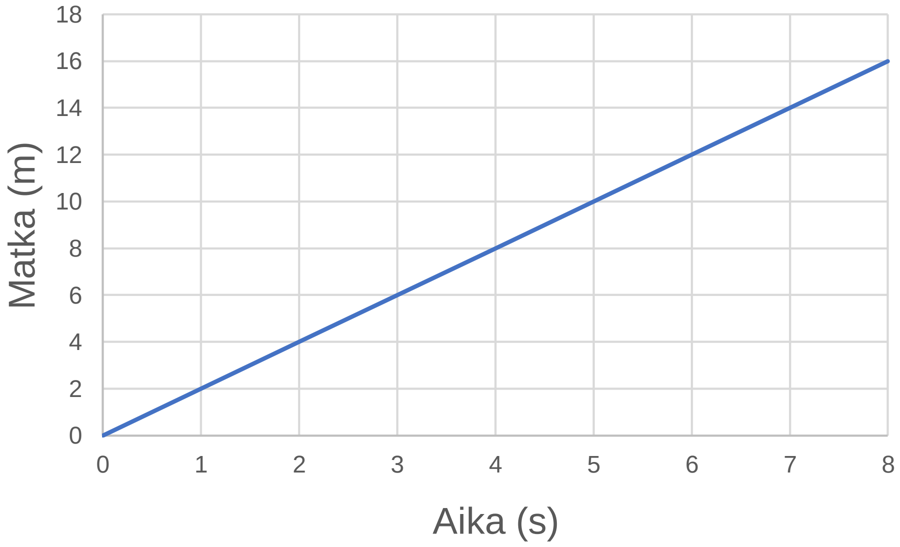
- Aika riippuu matkan pituudesta.

Matka-aika on nopeuden funktio.

- Aika riippuu käytetystä nopeudesta.

Hinta on määrän funktio.

- Tuotteen hinta riippuu tuotteiden määrästä.



Esimerkki 2. Appelsiinit maksavat 2,59 €/kg.

a) Kuinka monta kiloa appelsiineja voi ostaa 2 eurolla?

b) Kuinka paljon maksaa 4,25 kg appelsiineja?

a) Kysytään kilomäärää:

$$\frac{2\ €}{2{,}59\ \frac{€}{\mathrm{kg}}} = \frac{2}{2{,}59}\ \mathrm{kg} = 0{,}772\ \ldots\ \mathrm{kg} \approx 0{,}8\ \mathrm{kg}$$

Yksikkötarkastelu:

$$\frac{€}{\frac{€}{\mathrm{kg}}} = \frac{€}{1} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{€} = \mathrm{kg}$$

b) Kysytään euromäärää:

$$4{,}25\ \mathrm{kg} \cdot 2{,}59\,\frac{€}{\mathrm{kg}} = 11{,}007\ \ldots €\approx 11\ €$$

Vastaus: a) Appelsiineja voi ostaa 0,8 kg; b) Appelsiinit maksavat 11 €.

Funktion merkintä

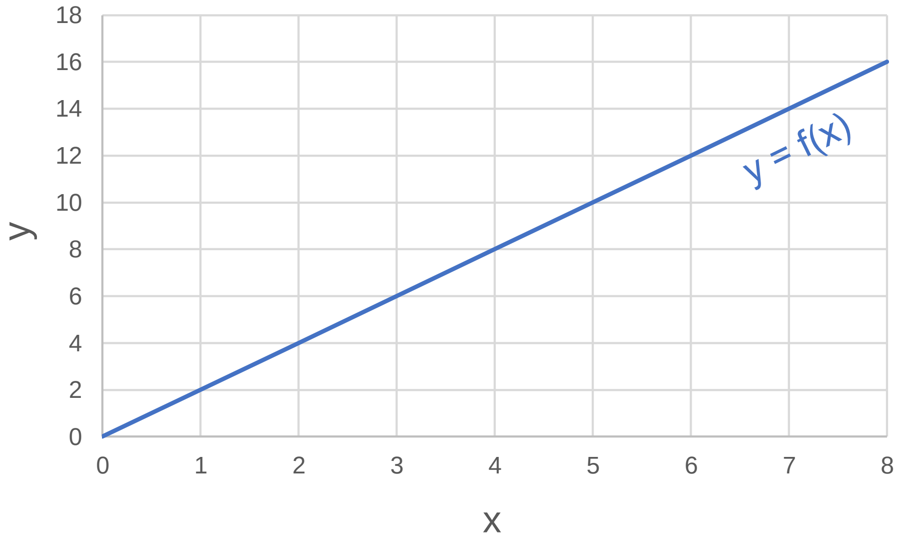
y on muuttujan x funktio

$$y = f(x)$$

funktion arvo

muuttuja

funktion nimi /
funktion merkintä



- Funktiota voidaan merkitä kahdella tavalla, esimerkiksi:

  $y = 2x + 3$ tai $f(x) = 2x + 3$

- Funktiossa tiettyä muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi y:n arvo.

Funktion arvo

9. luokan matematiikka

Funktion arvo

Muistetaan, että y = f(x) ja f(x) = y.

- f(x) on funktion arvo.
- x on muuttujan arvo.

Funktion arvo saadaan laskettua sijoittamalla muuttujalle x pyydetty arvo:

$$f(x) = 3\mathrm{x} + 1$$

muuttujan x arvo on nyt 2

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 1$$

$$f(2) = 7$$

funktion f(2) arvo

Funktion arvon laskeminen

Esimerkki 1. Laske funktion y = x – 2 arvo muuttujan arvolla 6.

Esimerkki 2. Laske funktion f(x) = 5x + 3 arvo, kun muuttuja saa arvon 2.

Esimerkki 3. Laske f(4), kun f(x) = -2x + 1.

Kaikki tehtävänannot ovat hieman erilaisia,
mutta niissä laskutapa on täysin samanlainen.
Pyydetään laskemaan **funktion arvoa**!

Funktion arvon laskeminen

Esimerkki 1. Laske funktion $y = x - 2$ arvo muuttujan arvolla 6.

$y = x - 2$ | muuttujan x arvo on 6 eli $x = 6$

$y = 6 - 2$

$y = 4$

Vastaus: Funktion arvo on 4.

Funktion arvon laskeminen

Esimerkki 2. Laske funktion $f(x) = 5x + 3$ arvo, kun muuttuja saa arvon 2.

$$f(x) = 5x + 3 \qquad | \; x = 2$$

$$f(2) = 5 \cdot 2 + 3$$

$$f(2) = 10 + 3$$

$$f(2) = 13$$

Vastaus: Funktion arvo on 13.

Funktion arvon laskeminen

Esimerkki 3. Laske f(4), kun f(x) = -2x + 1.

$$f(x) = -2x + 1$$

$$f(4) = -2 \cdot 4 + 1$$

$$f(4) = -8 + 1$$

$$f(4) = -7$$

Vastaus: Funktion arvo on -7.

Muuttujan arvon laskeminen

Esimerkki 4. Funktio $f(x) = 4x - 1$. Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon 2?

Esimerkki 5. Funktio $g(x) = 3x + 3$. Laske, millä muuttujan x arvolla $g(x)=0$.

Molemmat tehtävänannot ovat hieman erilaisia, mutta niissä laskutapa on täysin samanlainen. Pyydetään laskemaan **muuttujan arvoa**, kun funktion arvo tiedetään!

Muuttujan arvon laskeminen

Esimerkki 4. Funktio f(x) = 4x - 1. Millä muuttujan x arvolla funktio saa arvon 2?

funktion f(x) arvoksi sijoitetaan 2

$$f(x) = 4x - 1 \qquad | \text{ Funktio saa arvon 2 eli } f(x)=2.$$

$$2 = 4x - 1$$

x:n termit ja numerotermit eri puolille yhtäsuuruusmerkkiä, merkki vaihtuu yhtäsuuruusmerkin yli siirrettäessä

$$2 + 1 = 4x$$

$$4x = 3 \qquad | : 4$$

$$x = \frac{3}{4}$$

muuttujan x arvo on nyt 3/4

Vastaus: $x = \frac{3}{4}$.

Muuttujan arvon laskeminen

Esimerkki 5. Funktio g(x) = 3x + 3. Laske, millä muuttujan x arvolla g(x)=0.

$$g(x) = 3x + 3 \qquad | \; g(x)=0$$

$$0 = 3x + 3$$

$$-3x = 3 \qquad | \; : (-3)$$

$$x = \frac{3}{-3} = -1$$

Vastaus: x = -1.

Muuttujan arvon laskeminen

Esimerkki 6. Funktio $f(x) = 4x - 7$ ja $h(x) = 5x + 2$. Laske, millä muuttujan x arvolla $f(x) = h(x)$.

$$f(x) = h(x) \qquad | \text{ Sijoitetaan } f(x) = 4x - 7 \text{ ja } h(x) = 5x + 2$$

$$4x - 7 = 5x + 2$$

$$4x - 5x = 2 + 7$$

$$-x = 9 \qquad | : (-1)$$

$$x = -9$$

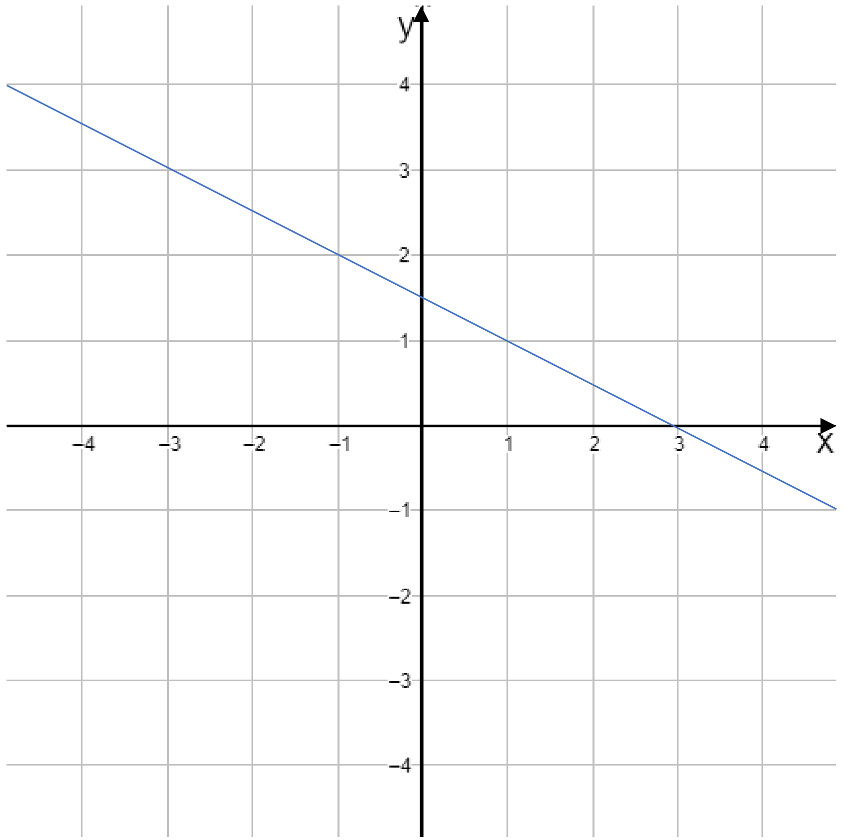
Vastaus: $x = -9$.

Arvojen määrittäminen kuvaajan avulla

Esimerkki 7. Määritä kuvaajan avulla a) f(-1) ja b) f(0).

c) Millä muuttujan x arvolla f(x) = 3?

d) Millä muuttujan x arvolla f(x) = 0?



a) Funktion arvo muuttujan x arvolla -1 on 2,
eli **f(-1) = 2**.

b) **f(0) = 1,5**.

c) f(x) = 3, kun **x = -3**.

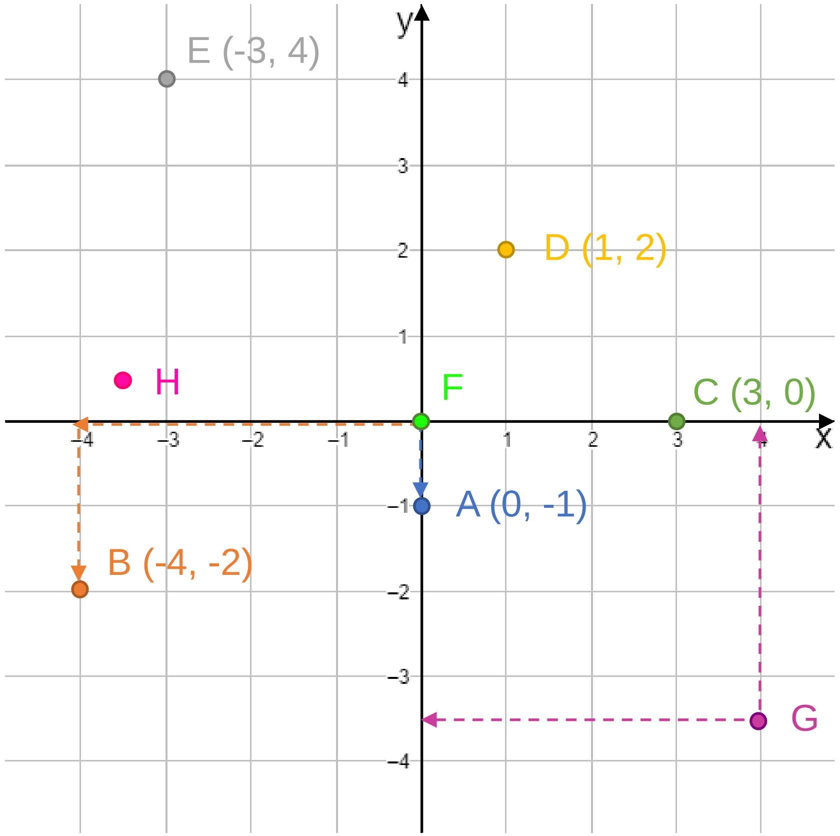
d) f(x) = 0, kun **x = 3**.

Suoran piirtäminen

9. luokan matematiikka

xy-koordinaatisto ja koordinaattipisteet (x, y)

Esimerkki 1.
a) Merkitse koordinaatistoon pisteet
A (0, -1), B (-4, -2), C (3, 0), D (1, 2) ja E (-3, 4).
b) Määritä pisteiden F-H koordinaatit muodossa (x, y).



a) Ensimmäinen luku on x:n arvo,
toinen luku on y:n arvo, koska koordinaattipiste ilmoitetaan muodossa (x, y).
Esim. piste A (0, -1)

x-akselin kohdassa 0

y-akselin kohdassa -1

b) F: (0, 0) G: (4, -3,5) H: (-3,5, 0,5)

Suora: Ensimmäisen asteen funktio

Ensimmäisen asteen funktiossa muuttujan korkein aste on yksi eli eksponentti on yksi.

Ensimmäisen asteen funktio on suora.

Suoran yhtälö:

$$\boxed{y = kx + b}$$

y tai f(x)
= funktion arvo

b = vakiotermi

k = kulmakerroin

x = muuttuja

Kulmakerroin k:

- Positiivinen eli k>0: **nouseva** suora
- Negatiivinen eli k<0: **laskeva** suora
- Mitä suurempi k:n arvo, sitä **jyrkempi** suora.
- Jos eri suorilla k on sama, suorat ovat **yhdensuuntaiset**.

Vakiotermi b:

- Suoran **y-akselin leikkauspisteen** y-koordinaatti.
- Tehtävissä (0, b) ilmoittaa suoran y-akselin leikkauskohdan.
- Jos suoran yhtälö on muotoa y = kx, suora leikkaa y-akselin origossa (0, 0), koska b=0.

Esimerkki 2. Mitkä funktioista ovat ensimmäistä astetta?

A: $y = 4x + 3$	B: $f(x) = x^2 - 5$	C: $y = 3$
D: $y = -2x^3 + x - 1$	E: $y = x$	F: $g(x) = -9x$
G: $f(x) = x^1 - 1$	H: $y = - 5x^4 - x$	I: $f(x) = 2 - x$
J: $f(a) = a + 2$		

Ensimmäisen asteen funktioita ovat A, E, F, G, I ja J, koska niissä muuttujien eksponentti on ensimmäistä astetta eli 1.

Vastaus: A, E, F, G, I ja J.

Esimerkki 3.

a) Piirrä suoran $y = -2x + 2$ kuvaaja.

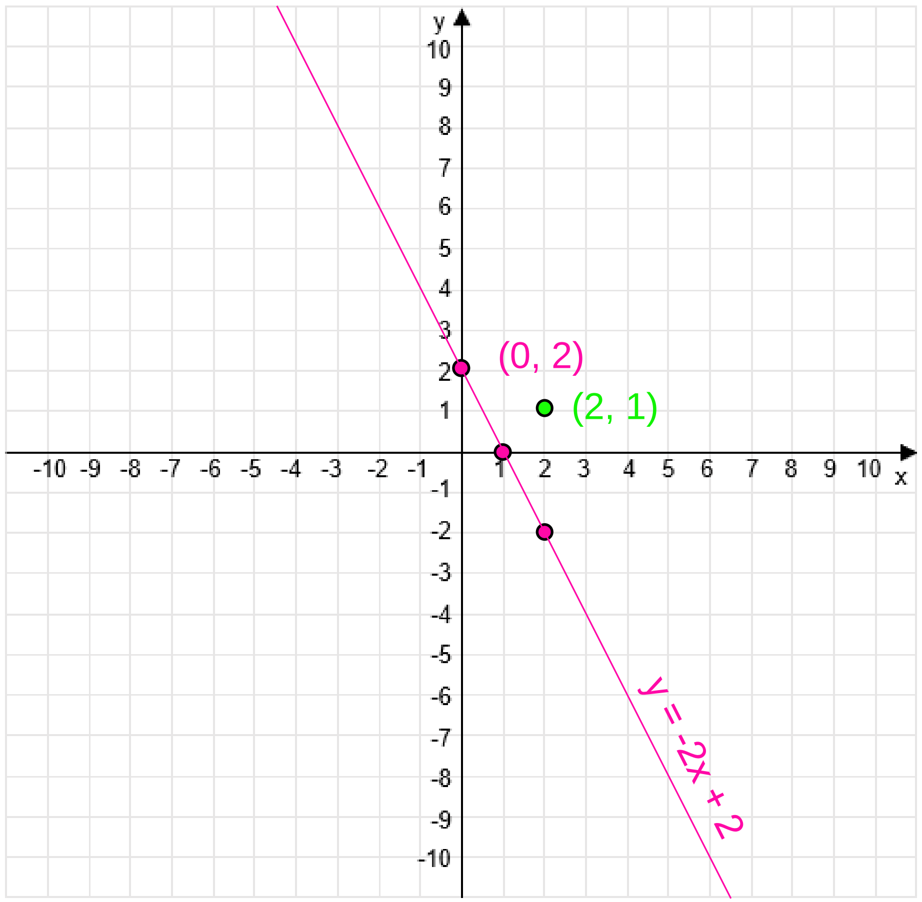
b) Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?

c) Tutki kuvaajasta, onko piste (2, 1) suoralla.

d) Tutki laskemalla, onko piste (1, -4) suoralla.

e) Tutki laskemalla, kulkeeko suora pisteen (3, 5) kautta.

x	$y = -2x + 2$	(x, y)
0	$y = -2 \cdot 0 + 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = -2 \cdot 1 + 2 = 0$	(1, 0)
2	$y = -2 \cdot 2 + 2 = -2$	(2, -2)



b) Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 2).

c) Ei ole, suora ei kulje pisteen (2, 1) kautta.

Esimerkki 3. (jatkuu)

d) Tutki laskemalla, onko piste (1, -4) suoralla.

e) Tutki laskemalla, kulkeeko suora pisteen (3, -4) kautta.

d) Sijoitetaan pisteen koordinaatit (1, -4) suoran yhtälöön:

$$y = -2x + 2 \qquad | \; x = 1, y = -4$$

$$-4 = -2 \cdot 1 + 2$$

$$-4 = 0$$ identtisesti epätosi, piste (1, -4) ei ole suoralla.

e)

$$y = -2x + 2 \qquad | \; x = 3, y = -4$$

$$-4 = -2 \cdot 3 + 2$$

$$-4 = -4$$ identtisesti tosi, piste (3, -4) on suoralla.

Vastaus: d) Piste (1, -4) ei ole suoralla; e) Piste (3, -4) on suoralla.

Esimerkki 4. Täydennä taulukko.

Suora	Muuttuja	Kulmakerroin	Nouseva/laskeva	Vakiotermi	y-akselin leikkauspiste
y = 4x + 6	**x**	**4**	**nouseva**	**6**	**(0, 6)**
f(x) = -x - 5	**x**	**-1**	**laskeva**	**-5**	**(0, -5)**
y = 2x	**x**	**2**	**nouseva**	**0**	**(0, 0)**
y = x + 0,5	**x**	**1**	**nouseva**	**0,5**	**(0, 0,5)**
g(a) = 9a - 8	**a**	**9**	**nouseva**	**-8**	**(0, -8)**
h(b) = -b	**b**	**-1**	**laskeva**	**0**	**(0, 0)**
f(x) = $\frac{3}{4}$x + $\frac{1}{7}$	**x**	$\mathbf{\frac{3}{4}}$	**nouseva**	$\mathbf{\frac{1}{7}}$	**(0, $\mathbf{\frac{1}{7}}$)**

Esimerkki 5.

a) Mitkä kuvaajan suorista A-E ovat nousevia?

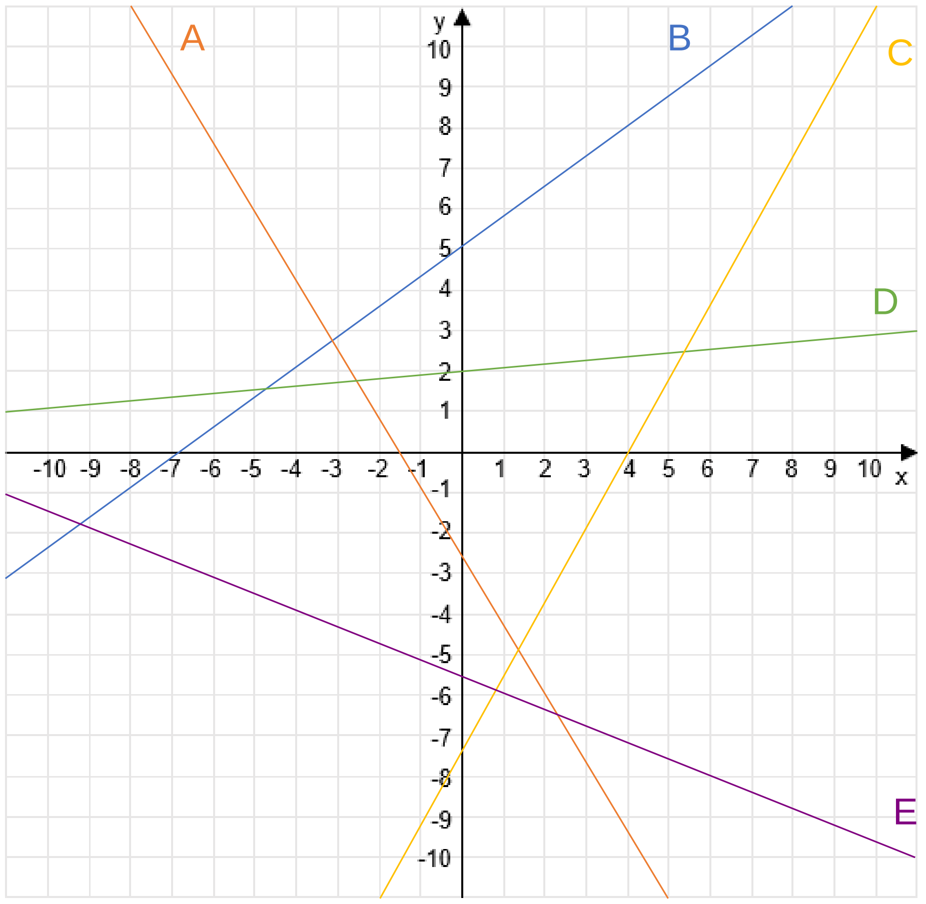
b) Mikä kuvaajan suorista A-E on jyrkimmin laskeva?

c) Mitkä seuraavista suorista ovat laskevia?

d) Mikä seuraavista suorista on jyrkimmin nouseva?

A: $y = -3x + 1$ B: $f(x) = x + 5$ C: $y = -2x - 3$

D: $f(x) = -9x$ E: $y = 4x - 2$ F: $y = 6x + 1$



a) Nousevia suoria ovat B, C ja D ($k > 0$).

b) Suora A on jyrkimmin laskeva ($k < 0$).

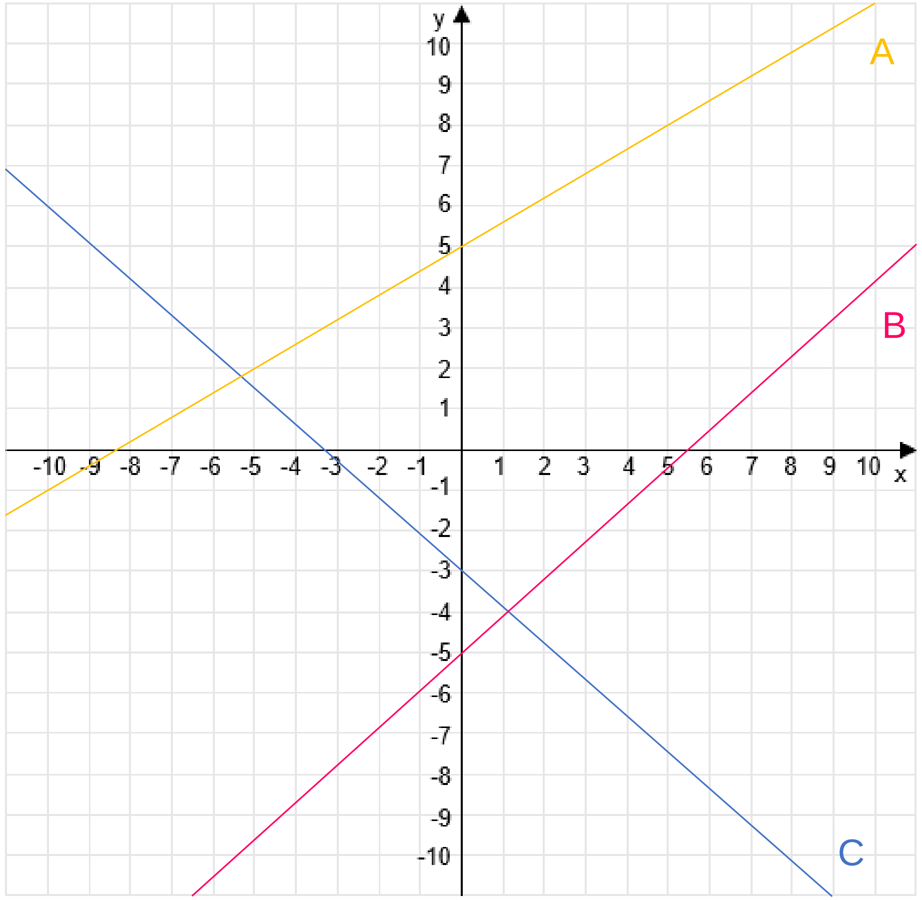
c) Laskevia suoria ovat A, C ja D ($k < 0$).

d) F on jyrkimmin nouseva ($k > 0$ ja suurin k:n arvo).

Esimerkki 6.
a) Missä pisteessä kuvaajan suorat A-C leikkaavat y-akselin?
b) Missä pisteessä seuraavat suorat A-E leikkaavat y-akselin?

A: $y = 3x$ B: $y = 5x - 2$ C: $y = -x + 5$

D: $y = -2x + 9$ E: $y = -11x - 8$ F: $y = -15x$



a) A: (0, 5)
B: (0, -5)
C: (0, -3)

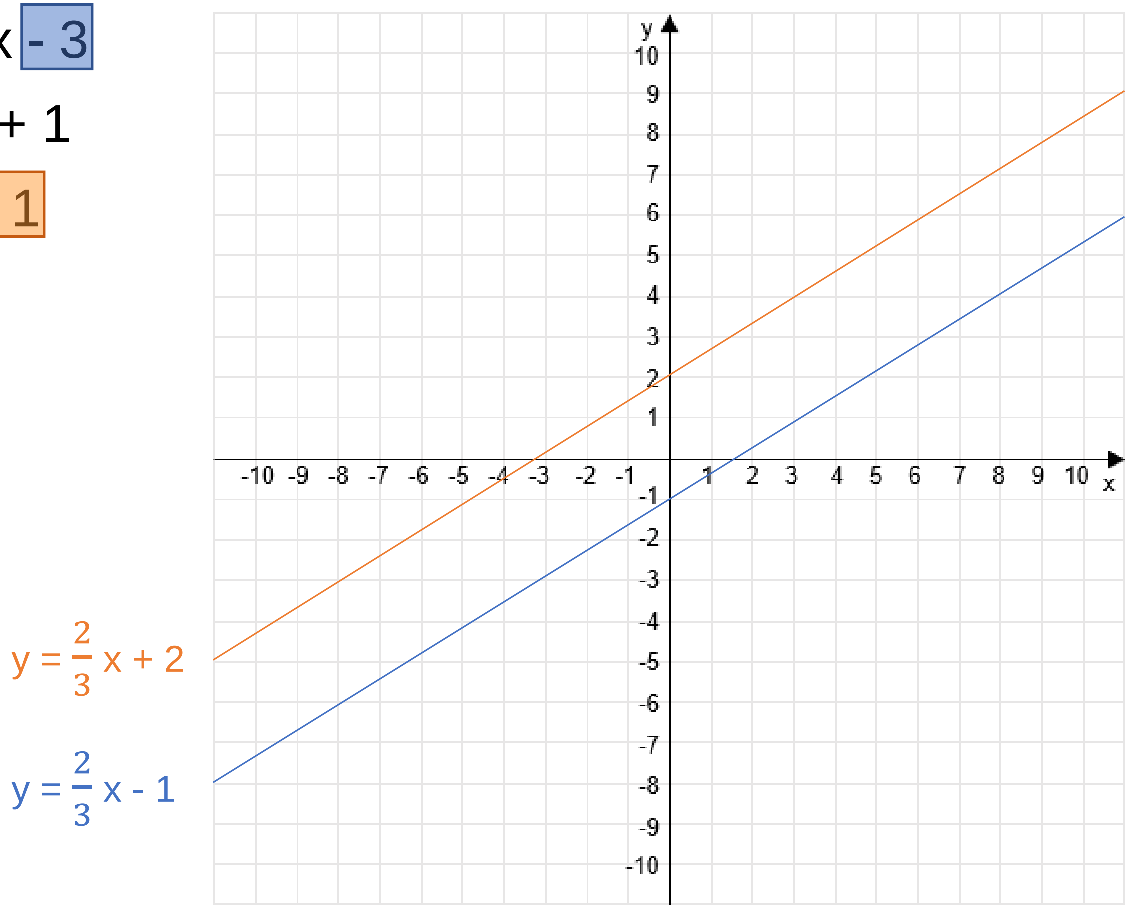
b) A: (0, 0)
B: (0, -2)
C: (0, 5)
D: (0, 9)
E: (0, -8)
F: (0, 0)

Esimerkki 7.
a) Mitkä suorista ovat yhdensuuntaisia?
b) Mitkä suorista leikkaavat y-akselin samassa kohdassa?

A: $y = 2x - 3$ B: $-3x$ C: $-7x - 3$

D: $y = -2x + 5$ E: $2x - 1$ F: $-x + 1$

G: $y = 7x - 1$ H: $-7x$ I: $x - 1$



a) A ja E sekä C ja H (sama k).

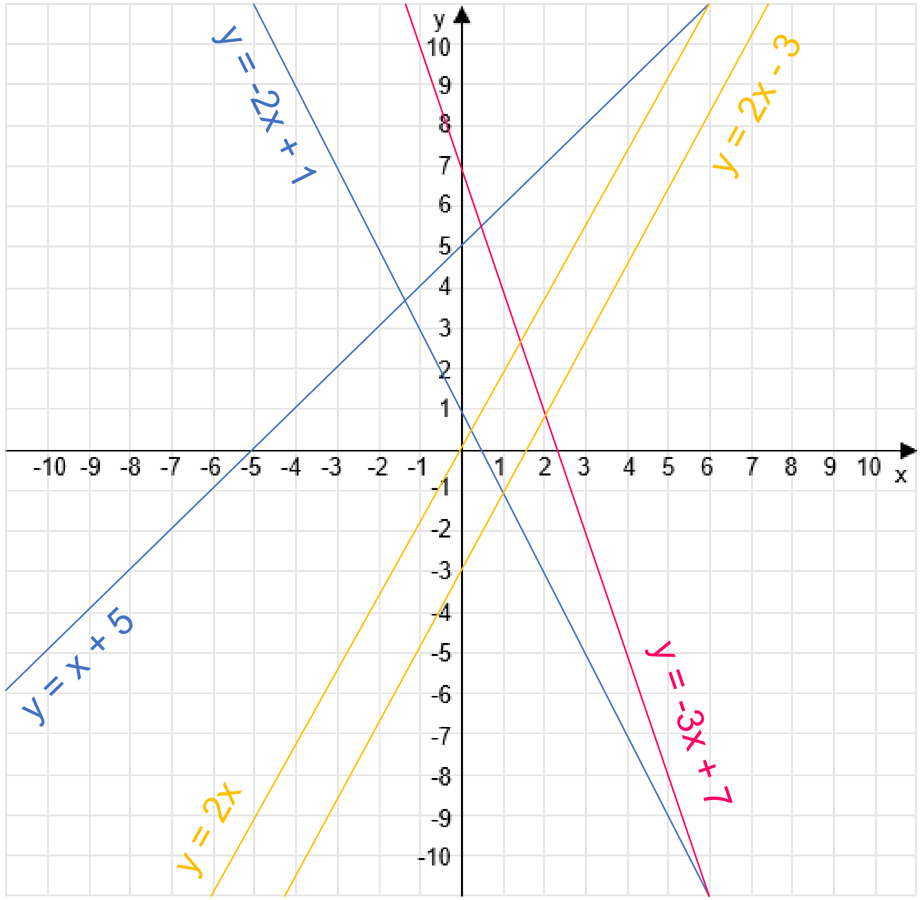
b) A ja C, B ja H, E ja G ja I (sama b).

Esimerkki 8. Kuinka monta yhteistä pistettä suorilla on? (Yhtälöstä, ei kuvaajasta)

a) $y = x + 5$ ja $y = -2x + 1$

b) $y = -3x + 7$ ja $y = 7 - 3x$

c) $y = 2x$ ja $y = 2x - 3$



a) Yksi piste (suorilla eri kulmakertoimet).

b) Ääretön määrä yhteisiä pisteitä
(samat suorat, koska k ja b ovat suorilla samat).

c) Ei yhtään yhteistä pistettä
(suorilla sama kulmakerroin eli sama jyrkkyys,
joten suorat eivät leikkaa toisiaan).

Esimerkki 9. Piirrä suoran a) y = 2x + 3 b) y = - $\frac{2}{3}$x - 0,5 kuvaaja ilman taulukkoa.

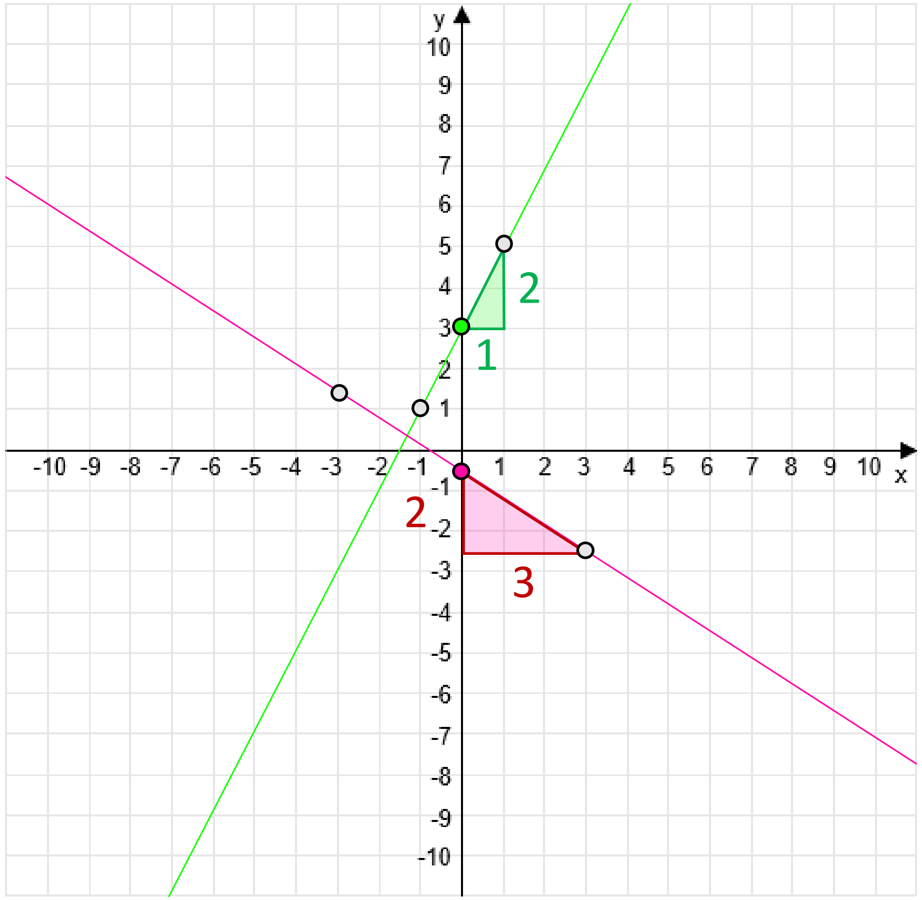
a) Suoran yleinen yhtälö y = kx + b.

y = 2x + 3

Vakiotermi b = 3 eli y-akselin leikkauspiste (0, 3).

Kulmakerroin k = 2 = $\frac{2}{1}$ eli nouseva suora (k > 0),

jossa y:n muutos 2 ja x:n muutos 1.



b) Suoran yleinen yhtälö y = kx + b.

y = -3x - 0,5

Vakiotermi b = -0,5 eli y-akselin leikkauspiste (0, -0,5).

Kulmakerroin k = - $\frac{2}{3}$ = $\frac{-2}{3}$ eli laskeva suora (k < 0),

jossa y:n muutos -2 ja x:n muutos 3.

Akselien suuntaiset suorat

9. luokan matematiikka

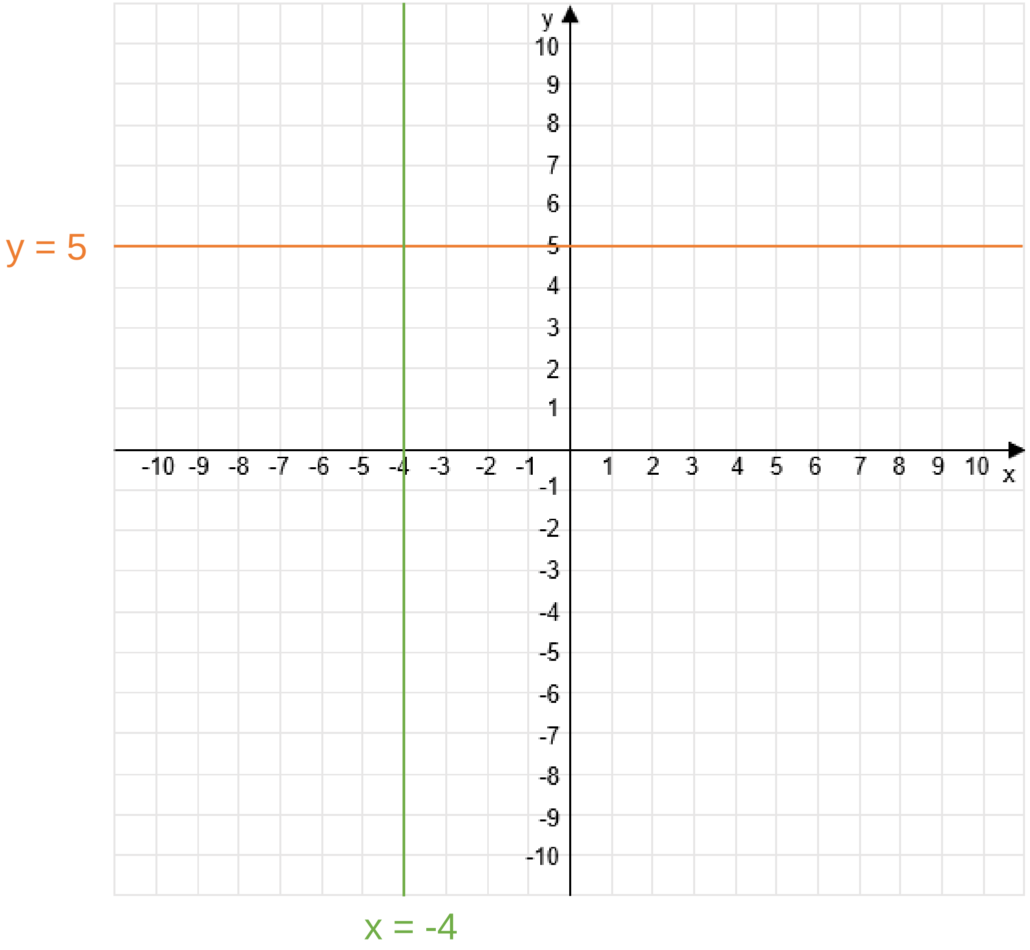
Akselien suuntaiset suorat

x-akselin suuntainen suora (vaakasuora):

$$y = a$$

y-akselin suuntainen suora (pystysuora):

$$x = b$$

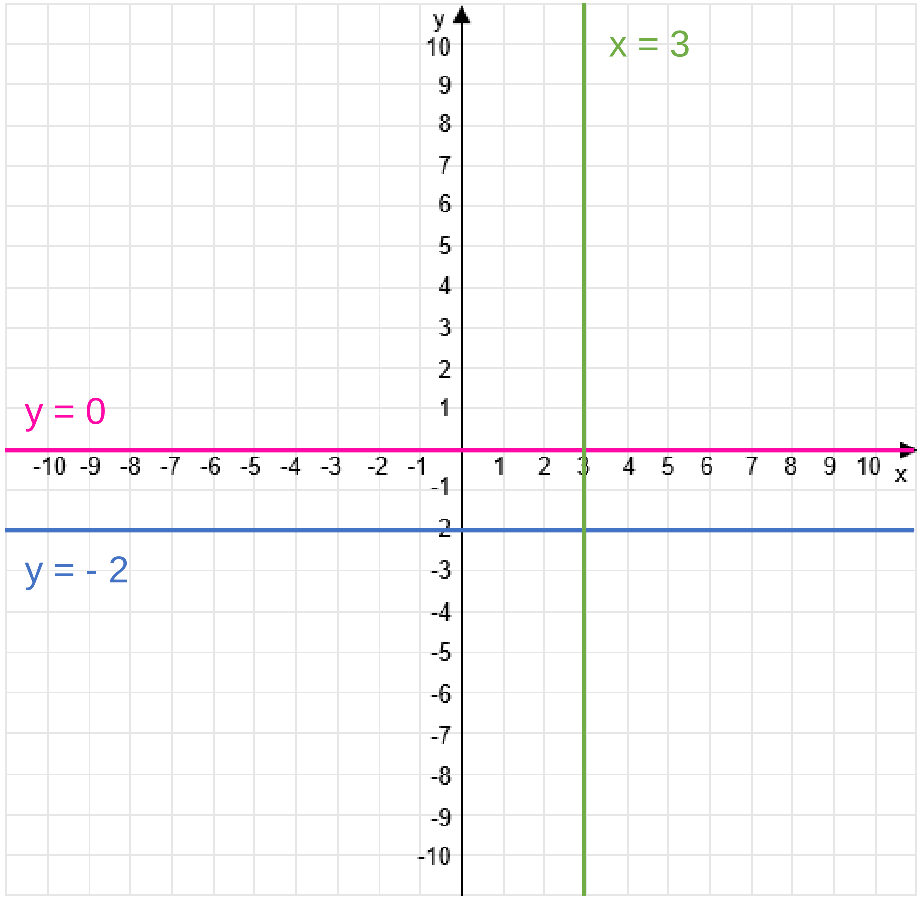


Esimerkki 1. Piirrä suora a) y = -2, b) x = 3, c) y = 0.

a) Etsitään y-akselilta kohta -2 ja piirretään vaakasuora suora.

b) Etsitään x-akselilta kohta 3 ja piirretään pystysuora suora.

c) Etsitään y-akselilta kohta 0 ja piirretään vaakasuora suora.

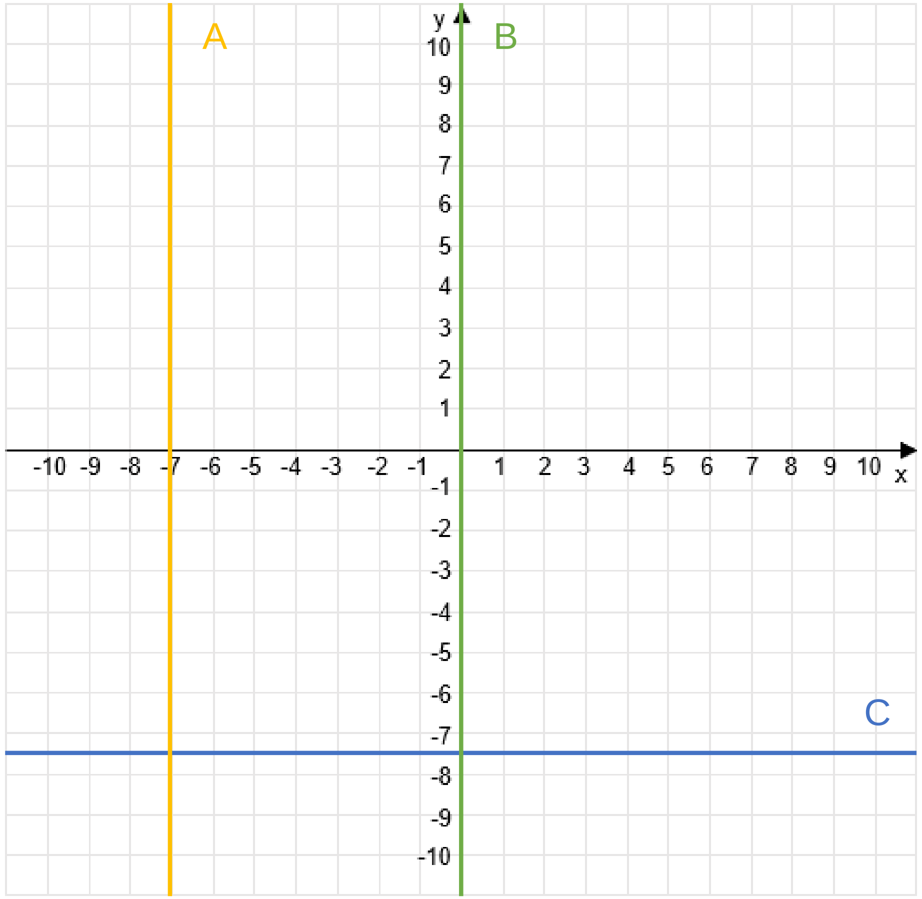


Esimerkki 2. Määritä suorien yhtälöt.

A: y-akselin suuntainen suora, joten yhtälö on muotoa x = b. Suora kulkee x-akselin kohdasta -7, joten yhtälö on **x = -7**.

B: y-akselin suuntainen suora, joten yhtälö on muotoa x = b. Suora kulkee x-akselin kohdasta 0, joten yhtälö on **x = 0**.

C: x-akselin suuntainen suora, joten yhtälö on muotoa y = a. Suora kulkee y-akselin kohdasta -7,5, joten yhtälö on **y = -7,5**.



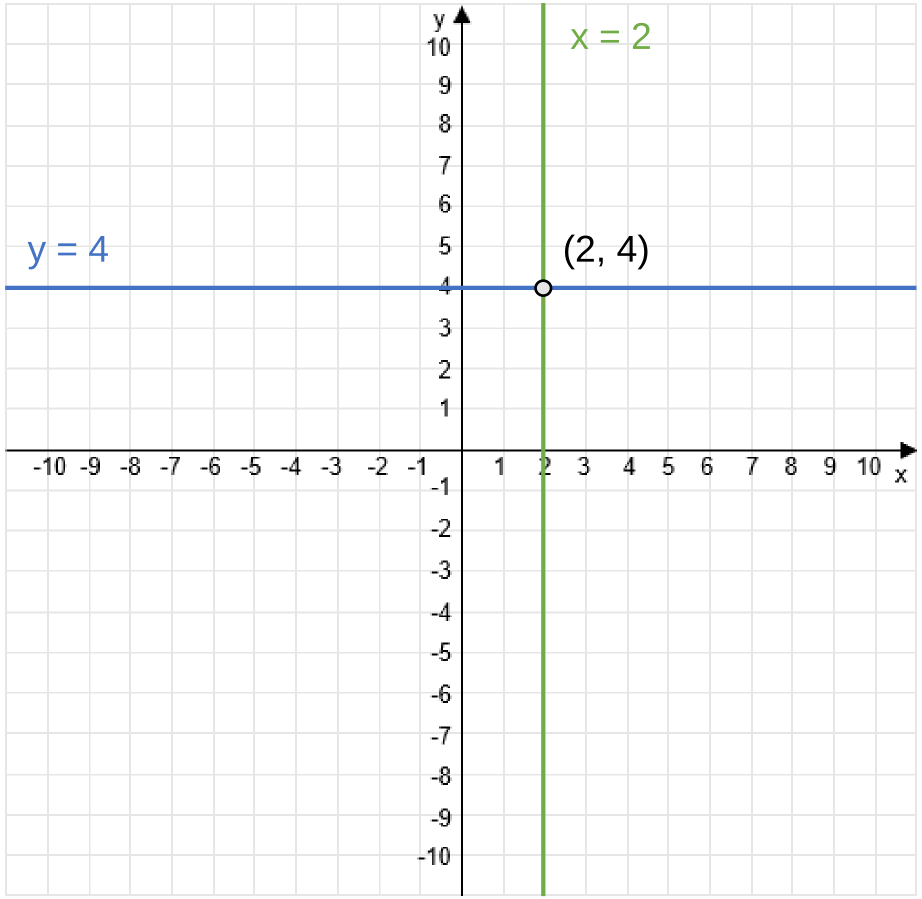
Esimerkki 3. Täydennä taulukko.

Suora	x-akselin suuntainen	y-akselin suuntainen
$y = 3$	**Kyllä**	
$x = 2$		**Kyllä**
$y = -5$	**Kyllä**	
$x = 0$		**Kyllä**

Esimerkki 4. Mikä on sen suoran yhtälö, joka on
a) x-akselin
b) y-akselin
suuntainen ja kulkee pisteen (2, 4) kautta.

a) x-akselin suuntainen suora (vaakasuora) on
muotoa y = a.
Koordinaattipisteessä (x, y) jälkimmäinen luku on y:n arvo. Suora kulkee pisteen (2, 4) kautta, joten
y = 4.

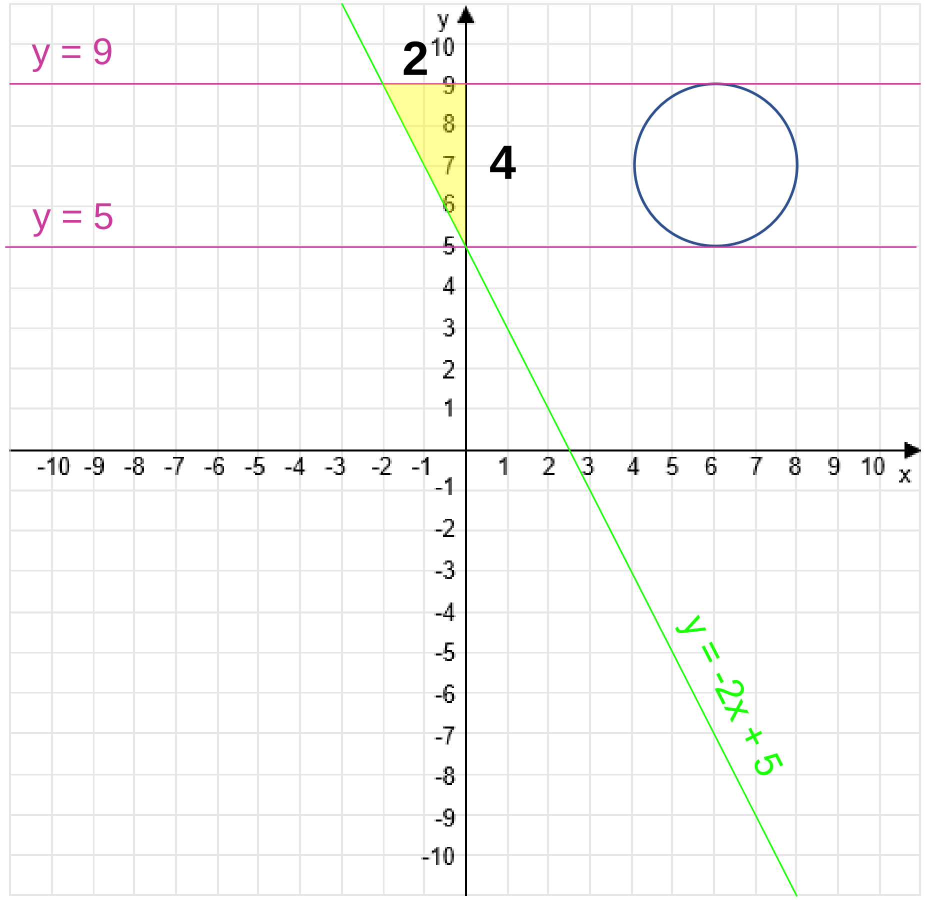
b) y-akselin suuntainen suora (pystysuora) on
muotoa x = b.
Koordinaattipisteessä (x, y) ensimmäinen luku on x:n arvo. Suora kulkee pisteen (2, 4) kautta, joten
x = 2.



Esimerkki 5. SOVELTAVA.

a) Määritä ympyrän vaakasuorien tangenttien yhtälöt.

b) Laske tangenttien, y-akselin ja suoran
y = -2x + 5 sisälle jäävän kolmion pinta-ala.



a) Tangentti on suora, joka sivuaa ympyrän kehää
(7. luokan matematiikka).

Vaakasuoria tangentteja on kaksi: **y = 9** ja **y = 5**.

b) Piirretään suora y = -2x + 5.

Tangenttien ja suoran sisään jää kolmio (keltainen väri).

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ (ruutua)}$$

Vastaus: a) y = 9 ja y = 5; b) Kolmion pinta-ala on 4 ruutua.

Suoran yhtälön määritys

9. luokan matematiikka

Suoran yhtälön määritys

Suoran yhtälö on muotoa y = kx + b.

Määritys kuvaajan avulla:

1. Etsi suoran ja y-akselin leikkauskohta: vakiotermi b.
2. Valitse kaksi suoran pistettä, jotka osuvat sekä x- että y-akselilla kokonaislukuihin. Piirrä suorakulmainen apukolmio näiden pisteiden avulla. Katso kolmiosta y:n muutos ja x:n muutos (ruutujen avulla).

   Kulmakerroin: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

   Jos suora on nouseva, niin k > 0 eli etumerkki +.
   Jos suora on laskeva, niin k < 0 eli etumerkki -.
3. Täydennetään suoran yhtälö y = kx + b saaduilla b:n ja k:n arvoilla.

Määritys sanallisesta tehtävästä:

1. Kulmakerroin ilmoitetaan tehtävänannossa tai saadaan suoraan toisesta suorasta, jos suorat ovat yhdensuuntaiset.
2. Vakiotermi saadaan suoraan koordinaattipisteestä (0, b), jos x:n arvo on nolla.

   Jos on annettu piste (x, y), jossa x ≠ 0: vakiotermi b on laskettava. Sijoitetaan k, x ja y suoran yhtälön y = kx + b vastaaville paikoille ja ratkaistaan b.

Esimerkki 1. Määritä suorien A-C yhtälöt.

Suoran yhtälö on muotoa y = kx +b.

Suora A:

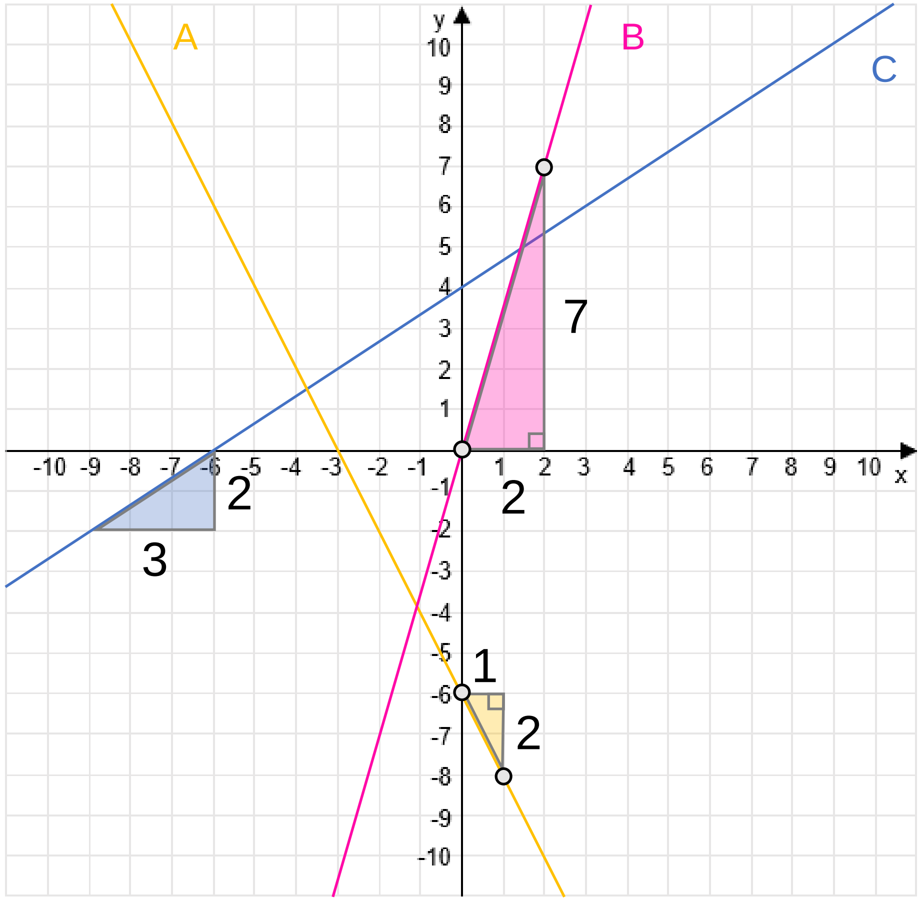
- Vakiotermi b = -6 (suoran A ja y-akselin leikkauskohta).
- Kulmakerroin k:
  - Laskeva suora, joten negatiivinen etumerkki (-).
  - Lasketaan k apukolmion avulla: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$
- Suoran A yhtälö: **y = -2x - 6**

Suora B:

- Vakiotermi b = 0 (suoran B ja y-akselin leikkauskohta on origossa).
- Kulmakerroin k:
  - Nouseva suora, joten positiivinen etumerkki (+).
  - Lasketaan k apukolmion avulla: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
- Suoran B yhtälö: **y = $3\frac{1}{2}$ x**

Suora C:

- Vakiotermi b = 4 (suoran B ja y-akselin leikkauskohta).
- Kulmakerroin k:
  - Nouseva suora, joten positiivinen etumerkki (+).
  - Lasketaan k apukolmion avulla: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$
- Suoran C yhtälö: **y = $\frac{2}{3}$x + 4**



Esimerkki 2. Suora kulkee pisteiden (0, -3) ja (1, 2) kautta. Ilmoita suoran yhtälö.

Suoran yhtälö on muotoa y = kx + b.

Tarvitaan vakiotermi b ja kulmakerroin k.

Vakiotermi b:

Suora kulkee pisteen (0, -3) kautta.
Koska x-koordinaatti on nolla, tiedetään,
että suora leikkaa tässä pisteessä y-akselin eli b = -3.

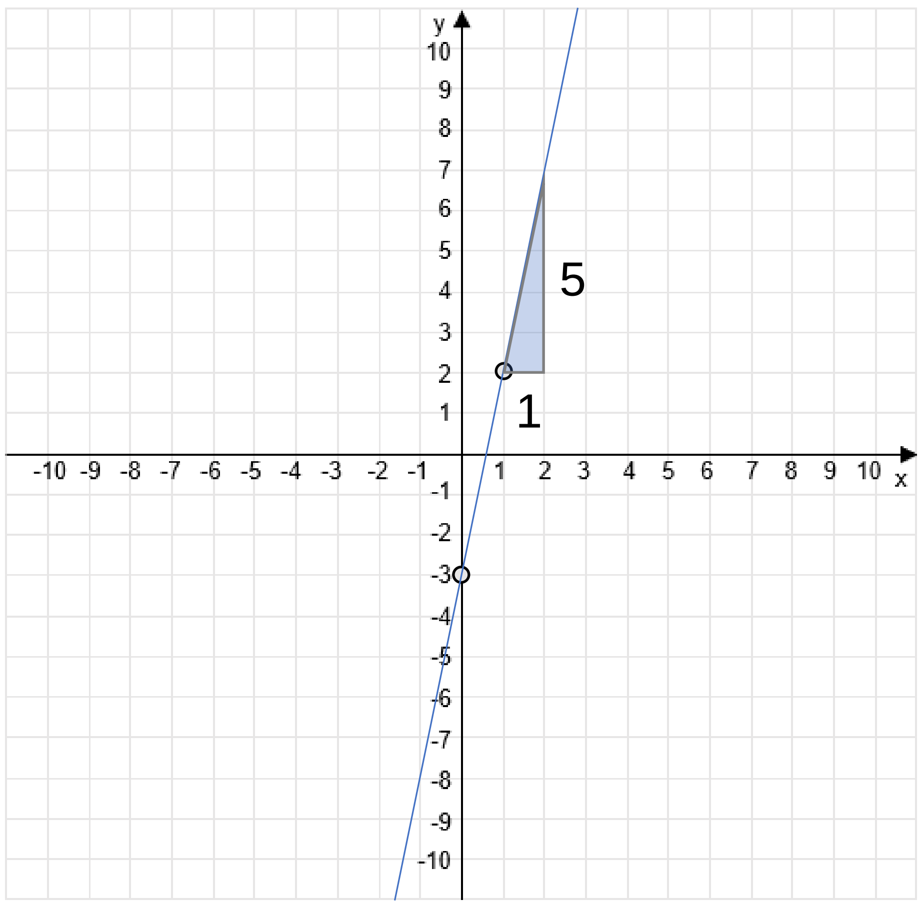
Kulmakerroin k:

Merkitään pisteet (0, -3) ja (1, 2) ja piirretään suora.

Kulmakerroin apukolmion avulla: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5$

Kulmakerroin on positiivinen, koska suora on nouseva.

Yhtälö: **y = 5x - 3**



Esimerkki 3. Ilmoita suoran yhtälö, kun suoran kulmakerroin on -4
ja se kulkee pisteen (0, 5) kautta.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

Kulmakerroin $k = -4$.

Vakiotermi $b = 5$.

- Vakiotermi b on y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti. Suora kulkee pisteen (0, 5) kautta, ja koska tämän pisteen x-koordinaatti on nolla, on piste y-akselilla.

Yhtälö: $\mathbf{y = -4x + 5}$

Vastaus: $y = -4x + 5$.

Esimerkki 4. Kirjoita sen suoran yhtälö, joka on suoran y = $\frac{3}{4}$x - 0,5 suuntainen ja leikkaa y-akselin pisteessä (0, 2).

Suoran yhtälö on muotoa y = kx + b.

Kulmakerroin k = $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

- Jos suorat ovat yhdensuuntaiset tai samansuuntaiset, niillä on sama kulmakerroin k.

Vakiotermi b = 2.

- Vakiotermi b on y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti. Suora kulkee pisteen (0, 2) kautta, ja koska tämän pisteen x-koordinaatti on nolla, on piste y-akselilla.

Yhtälö: **y =** $\mathbf{\frac{3}{4}}$ **x + 2**

Vastaus: y = $\frac{3}{4}$ x + 2.

Esimerkki 5.

a) Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka on yhdensuuntainen suoran $y = -3x + 1$ kanssa ja kulkee pisteen (0, 2) kautta.

b) Tutki piirtämättä, onko piste (1, 4) tällä suoralla.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

a) Yhdensuuntainen suoran $y = -3x + 1$ kanssa. => Kulmakerroin $k = -3$.

Kulkee pisteen (0, 2) kautta. => Vakiotermi $b = 2$.

Yhtälö: $y = -3x + 2$.

b) Tutkitaan, onko piste (1, 4) suoralla. Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = 4$ suoran yhtälöön.

$$y = -3x + 2$$

$$4 = -3 \cdot 1 + 2$$

$$4 = -3 + 2$$

$4 = -1$ identtisesti epätosi, piste (1, 4) ei ole suoralla.

Vastaus: a) $y = -3x + 2$; b) Piste (1, 4) ei ole suoralla.

Esimerkki 6. Määritä piirtämättä sen suoran yhtälö, joka on suoran $y = -2x - 4$ suuntainen ja kulkee pisteen $(-3,1)$ kautta.

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

Suoran $y = -2x - 4$ suuntainen. => Kulmakerroin $k = -2$.

Vakiotermiä b ei saada suoraan tehtävänannosta, koska pisteen x-koordinaatti ei ole nolla.

Tiedetään, että pisteen $(-3, 1)$ koordinaatit toteuttavat yhtälön eli $x = -3$ ja $y = 1$.

Sijoitetaan k, x ja y suoran yhtälöön:

$$y = kx + b \qquad | \; k = -2, x = -3, y = 1$$
$$1 = -2 \cdot (-3) + b$$
$$1 = 6 + b$$
$$b = -5$$

Suoran yhtälö: $y = -2x - 5$.

Vastaus: $y = -2x - 5$.

Paraabeli

9. luokan matematiikka

Paraabeli

Paraabeli **$y = ax^2 + c$** on toisen asteen funktion kuvaaja.

Paraabelin akseli = paraabelin symmetria-akseli.

- Paraabeli on symmetrinen.

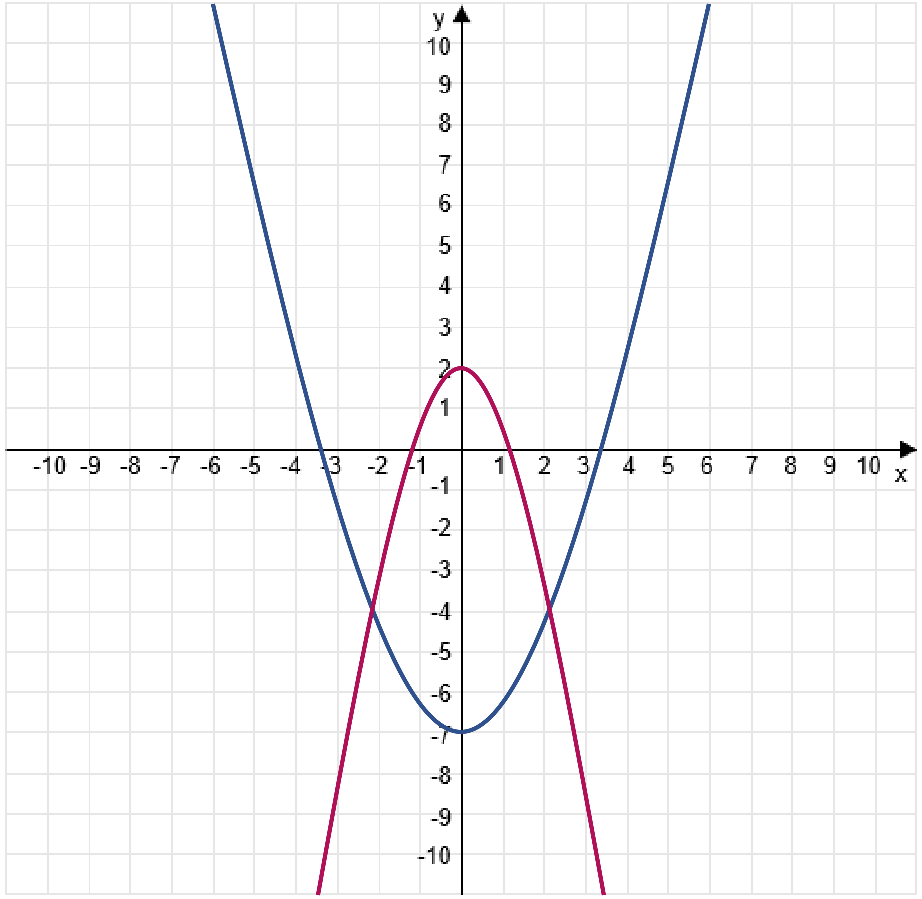
Paraabelin huippu = paraabelin ja akselin leikkauspiste.

- Huippu on pisteessä (0, c).

Paraabeli on **ylöspäin aukeava**, jos $a > 0$.

Paraabeli on **alaspäin aukeava**, jos $a < 0$.

Paraabeli on sitä leveämpi mitä pienempi $|a|$ on.



Esimerkki 1. Mitkä funktioista ovat toisen asteen funktioita?

A: $y = 2x + 3$	B: $f(x) = -x$	C: $g(x) = x^2 - 5$
D: $y = -x^2 + 4$	E: $y = 5$	F: $y = 5x^2 + 2$
G: $y = -8x$	H: $y = x^3 + x^2$	I: $f(x) = 0$

Vastaus: C, D ja F (muuttujan eksponentti on 2).

Esimerkki 2. Laske funktion $f(x) = x^2 + 4$ arvo, kun a) $x = 3$, b) $x= -1$ ja c) $x= 0$.

a) $f(x) = x^2 + 4 \quad | \; x = 3$

$f(3) = 3^2 + 4$

$f(3) = 13$

b) $f(x) = x^2 + 4 \quad | \; x = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 4$

$f(-1) = 5$

c) $f(x) = x^2 + 4 \quad | \; x = 0$

$f(0) = 0^2 + 4$

$f(0) = 4$

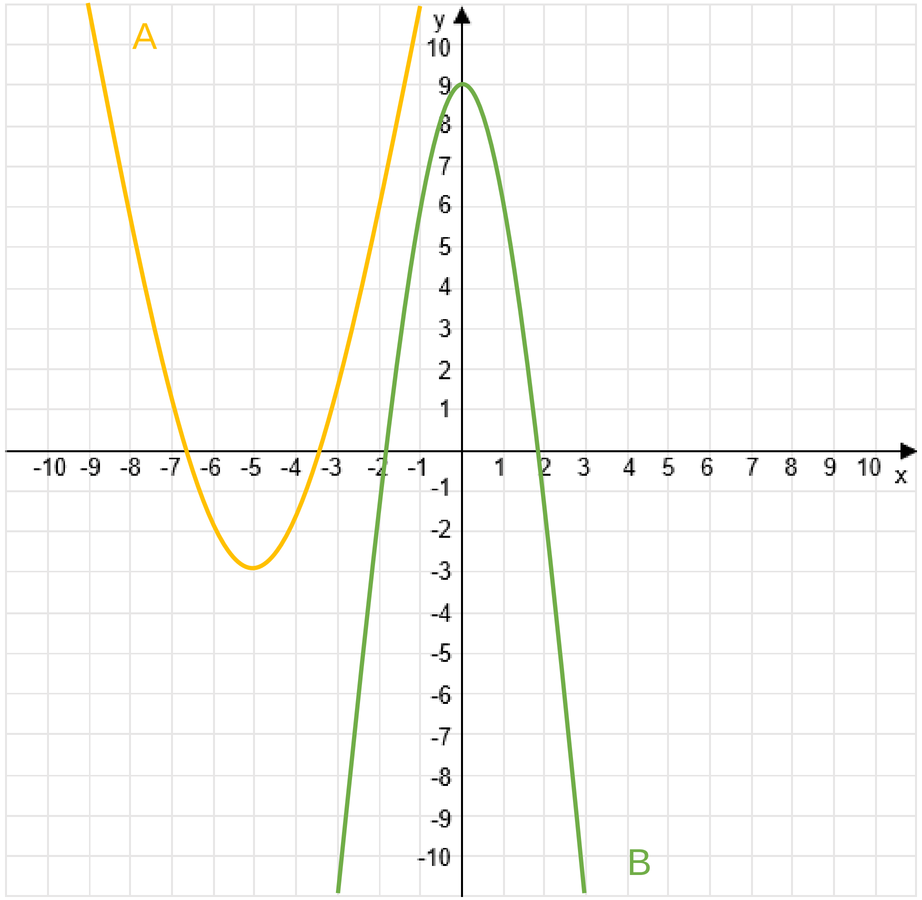
Vastaus: a) 13; b) 5; c) 4.

Esimerkki 3.

a) Ilmoita kuvaajan paraabelien huippujen koordinaatit ja paraabelien akselit.

b) Ilmoita seuraavien paraabelien huiput:

C: $y = -x^2 + 3$ D: $y = -3x^2 - 4$



a)

Paraabeli A:

Paraabelin huippu: (-5, -3)

Paraabelin akseli: x = -5

Paraabeli B:

Paraabelin huippu: (0, 9)

Paraabelin akseli: x = 0

b)

Paraabelin C huippu: (0, 3)

Paraabelin D huippu: (0, -4)

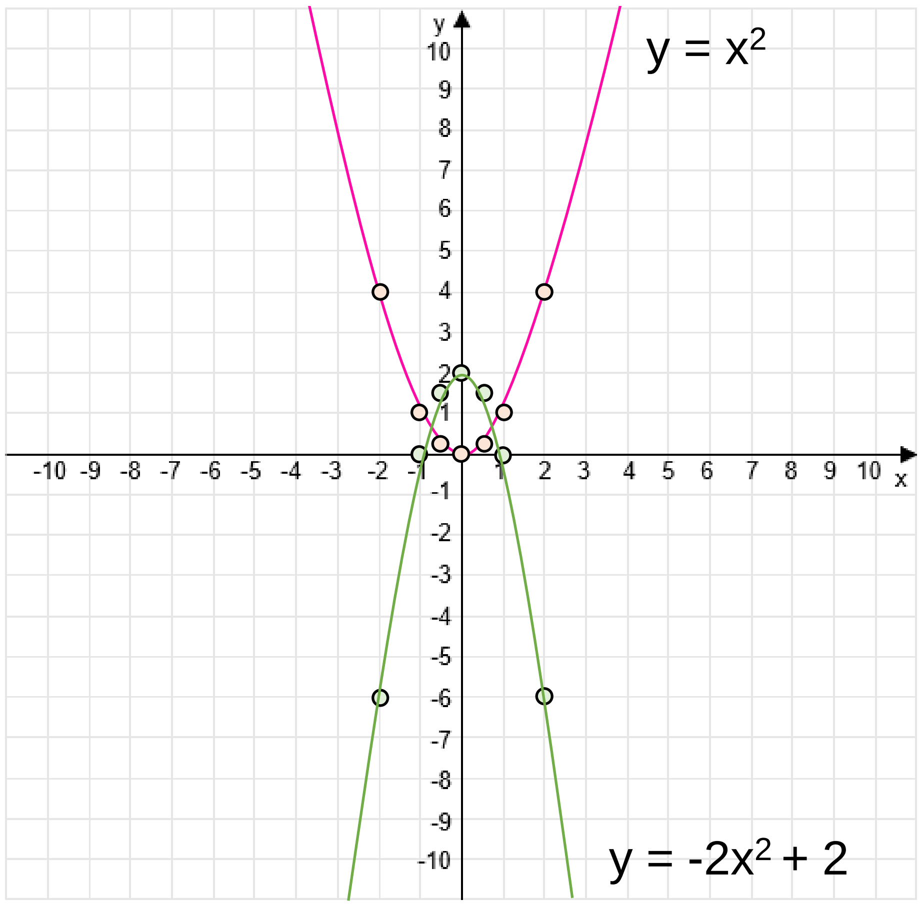
Esimerkki 4. Piirrä paraabelit a) $y = x^2$; b) $y = -2x^2 + 2$.

a)

x	$y = x^2$
0	$y = 0^2 = 0 \cdot 0 = 0$
± 0,5	$y = 0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$
± 1	$y = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
± 2	$y = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b)

x	$y = -2x^2 + 2$
0	$y = -2 \cdot 0^2 + 2 = 2$
± 0,5	$y = -2 \cdot 0{,}5^2 + 2 = 1{,}5$
± 1	$y = -2 \cdot 1^2 + 2 = 0$
± 2	$y = -2 \cdot 2^2 + 2 = -6$

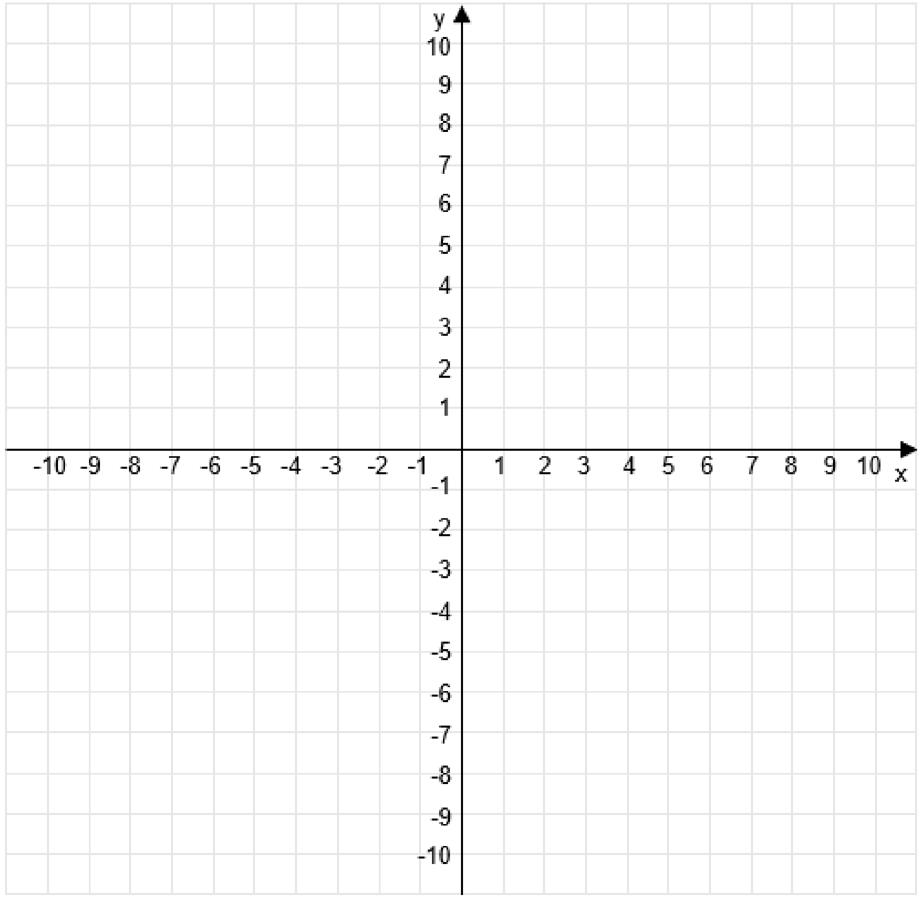


Esimerkki 5. Täydennä taulukko (aukeavuus, huippu). Mikä paraabeleista on levein/kapein.

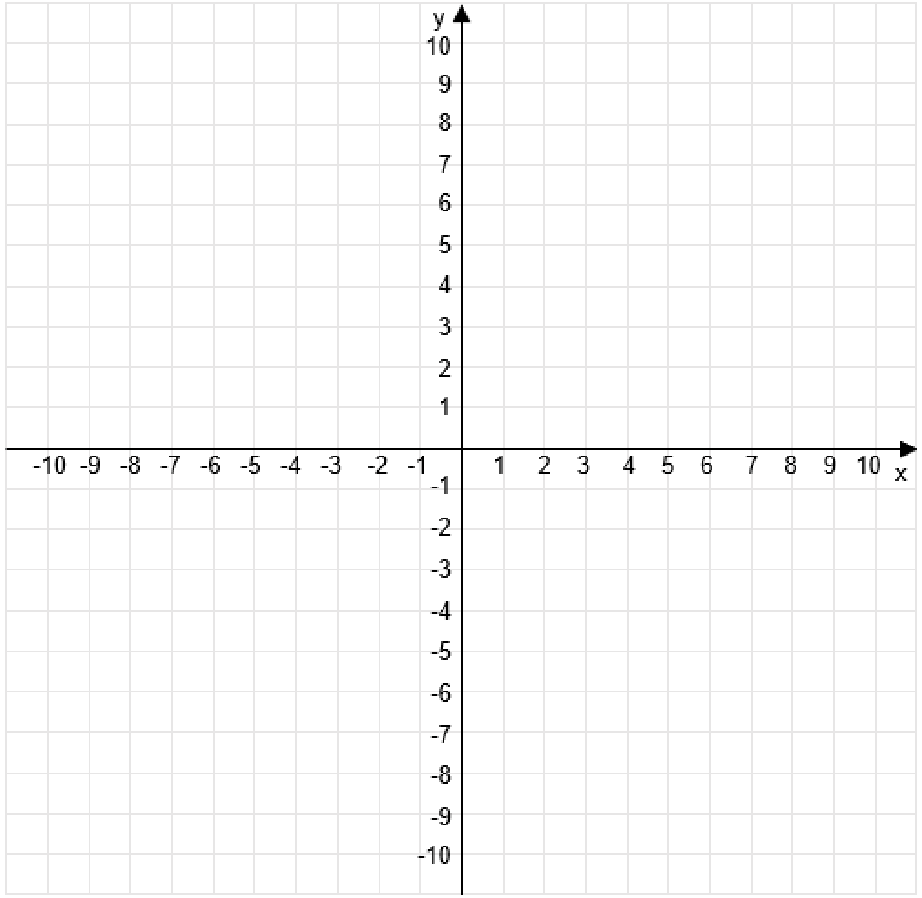
Käyrä	a	Alaspäin aukeava	Ylöspäin aukeava	c	Huippu	Levein	Kapein
$y = x^2 + 4$	**1**		**kyllä**	**4**	**(0, 4)**		
$y = 5x^2 - 2$	**5**		**kyllä**	**-2**	**(0, -2)**		
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$	$-\frac{1}{4}$	**kyllä**		**1**	**(0, 1)**	**kyllä**	
$y = -x^2$	**-1**	**kyllä**		**0**	**(0, 0)**		
$y = 9x^2 + 3$	**9**		**kyllä**	**3**	**(0, 3)**		**kyllä**
$y = -3x^2 - 7$	**-3**	**kyllä**		**-7**	**(0, -7)**		

Esimerkki 6. Piirrä samaan koordinaatistoon suora y=… sekä paraabeli, jossa a= ja c=. Määritä suoran ja paraabelin leikkauspisteiden koordinaatit.

KESKENERÄISET DIAT ALKAVAT.



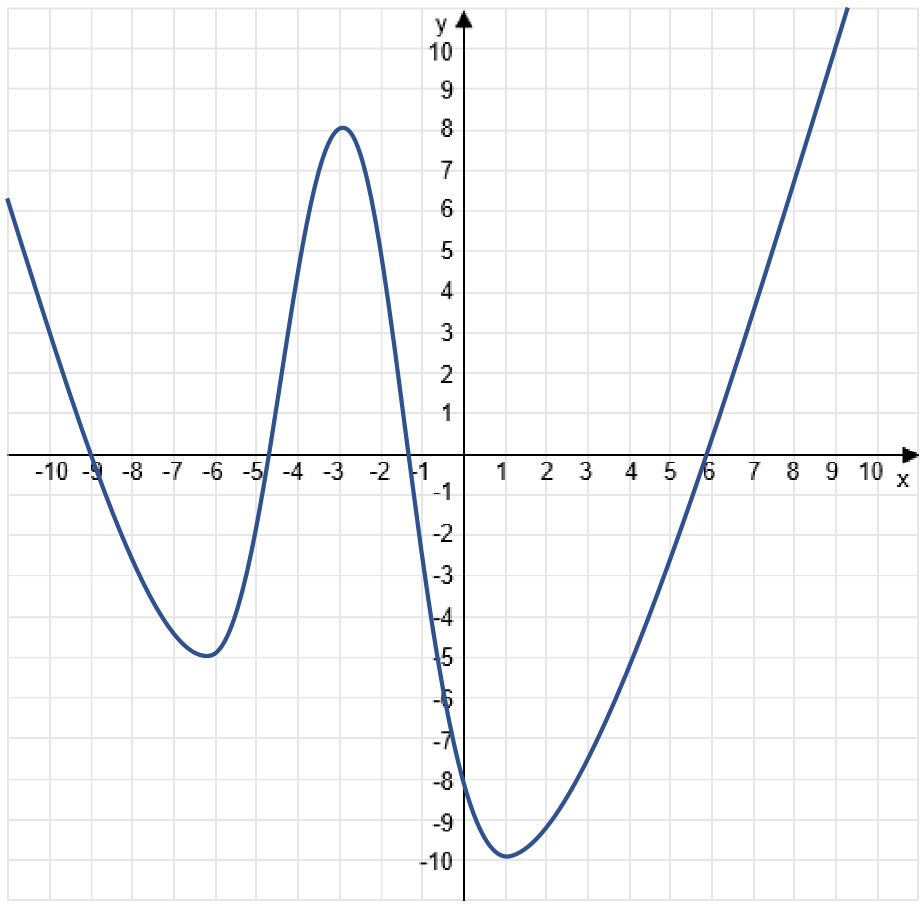
Esimerkki 7. Määritä paraabelin yhtälö.



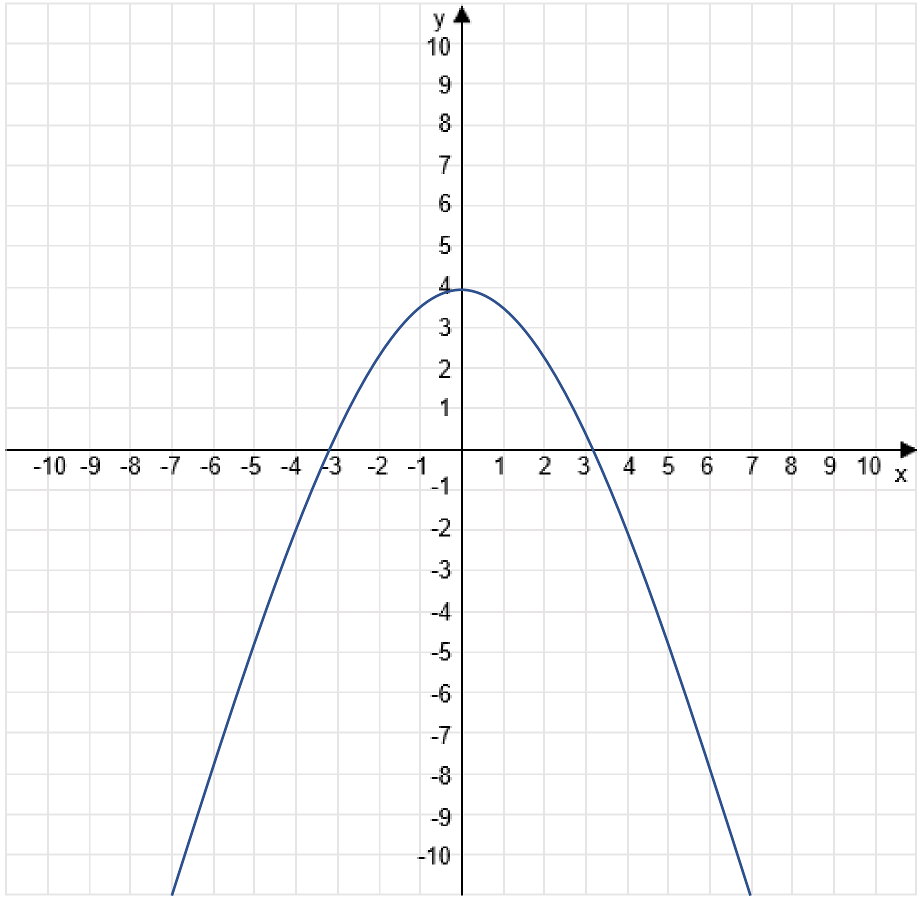
Funktion nollakohdat, positiivisuus ja negatiivisuus

9. luokan matematiikka

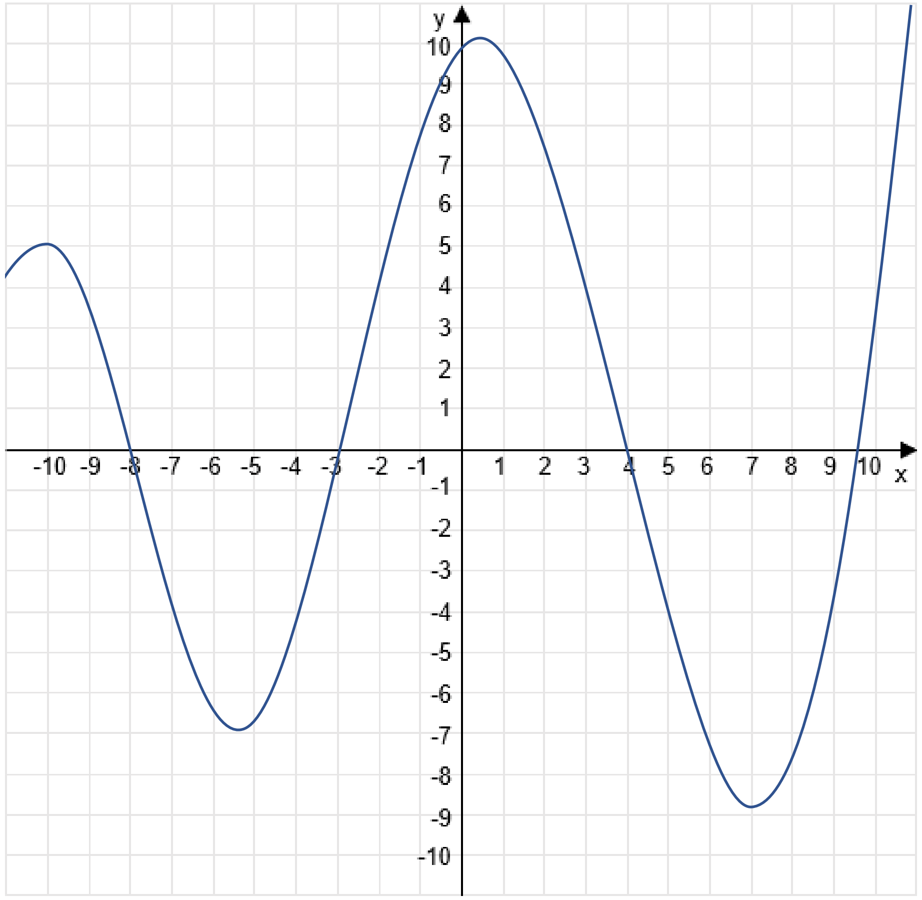
Funktion ominaisuuksia



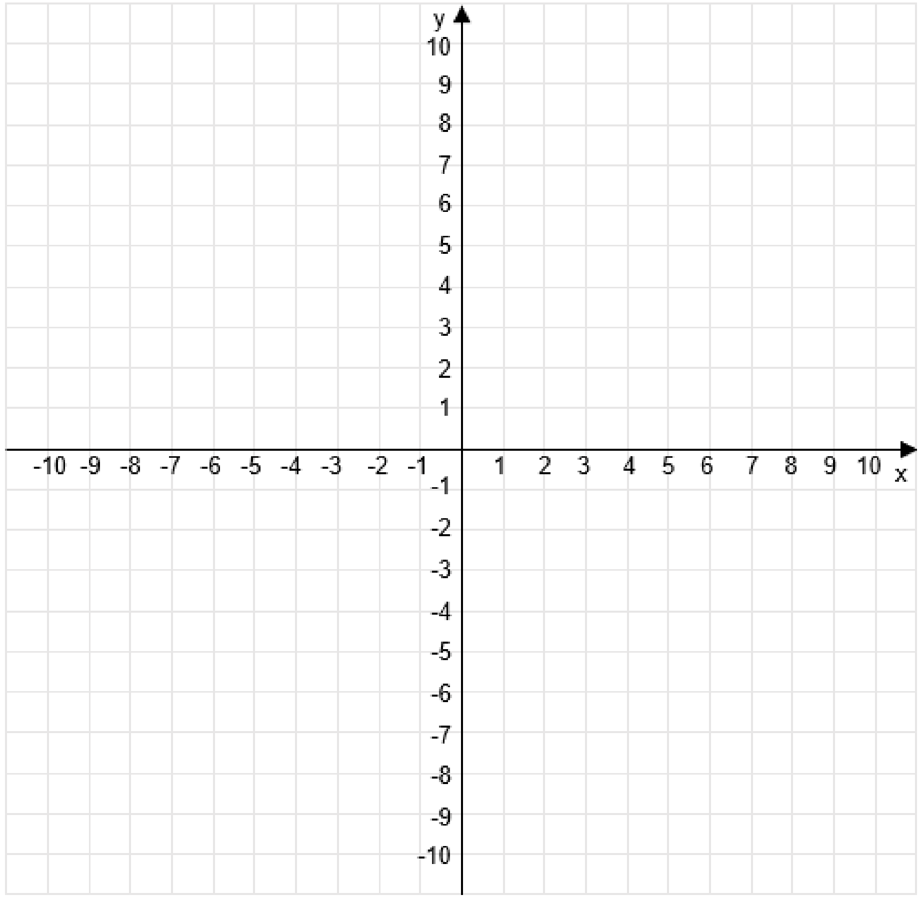
Esimerkki 1. Määritä kuvaajan avulla, millä muuttujan arvoilla



Esimerkki 2. Määritä kuvaajan avulla, millä muuttujan arvoilla f(x)=0, f(x)>0, f(x)<0.

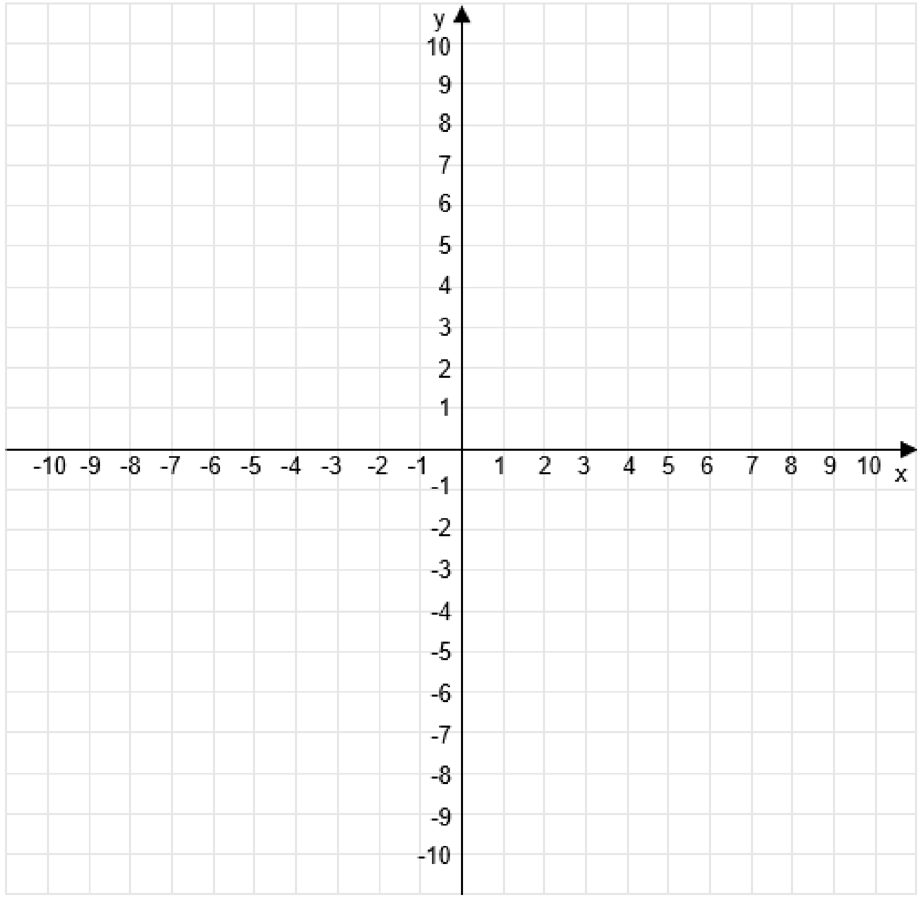


Esimerkki 3. Määritä kuvaajan avulla, millä muuttujan arvoilla f(x)<0, f(x)>g(x), g(x)>f(x), f(x)=g(x).



Esimerkki 4. Laske funktion nollakohta.

Esimerkki 5. Määritä funktion f(x) pienin arvo, suurin arvo, pienin arvo ja suurin arvo välillä …, pienin ja suurin arvo, kun x<3



Kasvava ja vähenevä funktio

9. luokan matematiikka

Kasvava ja vähenevä funktio

Esimerkki 1. Millä muuttujan arvoilla funktio f(x) on a) kasvava b) vähenevä. Millä muuttujan arvoilla funktio g(x) on a) kasvava b) vähenevä.

Esimerkki 2. Päättele millä muuttujan arvoilla funktio a) suora b) paraabeli on kasvava/vähenevä.